ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG MINH AN

MỘT SỐ MỞ RỘNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC EULER VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG MINH AN

MỘT SỐ MỞ RỘNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC EULER VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Tạ Duy Phượng

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Lời cảm ơn **2**

Lời nói đầu **3**

1 Bất đẳng thức Euler và một số mở rộng **4**

1.1. Một số kiến thức bổ trợ 4

1.1.1. Một số định lý cơ bản trong tam giác 4

1.1.2. Một số bất đẳng thức cơ bản 5

1.1.3. Tứ giác nội tiếp 6

1.1.4. Tứ giác ngoại tiếp 7

1.1.5. Tứ giác hai tâm 8

1.2. Bất đẳng thức Euler 9

1.3. Một số mở rộng của bất đẳng thức Euler 11

1.3.1. Mở rộng của bất đẳng thức Euler cho tam giác 11

1.3.2. Mở rộng của bất đẳng thức Euler cho tứ giác hai tâm . 32

1.3.3. Mở rộng của bất đẳng thức Euler cho đa diện 41

2 Một số ứng dụng của bất đẳng thức Euler **51**

2.1. Ứng dụng của bất đẳng thức Euler trong chứng minh các bất đẳng thức trong tam giác 51

2.2. Ứng dụng của bất đẳng thức Euler trong chứng minh các bất đẳng thức trong tứ giác 59

Kết luận **65**

Tài liệu tham khảo **66**

Lời cảm ơn

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Tạ Duy Phượng. Xin được gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc tới Thầy, người đã tận tình hướng dẫn và chỉ đạo tác giả tập dượt nghiên cứu khoa học trong suốt quá trình tìm hiểu tài liệu, viết và hoàn thiện Luận văn.

Đồng thời tôi xin chân thành cảm ơn các quý thầy cô trong Bộ môn toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, các Thầy Cô Viện Toán học đã tận tình giảng dạy, quan tâm và tạo mọi điều kiện thuận lợi về thủ tục hành chính để em hoàn thành khóa học và bảo vệ luận văn Thạc sĩ.

Tôi cũng chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè và cơ quan, đoàn thể nơi tôi công tác là Trường Trung học Phổ thông Bạch Đằng, Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng, đã tạo mọi điều kiện về vật chất lẫn tinh thần trong quá trình học tập, nghiên cứu và viết luận văn.

Xin được cảm ơn thầy giáo Hoàng Minh Quân đã cho phép tôi tham khảo và sử dụng bản thảo của thầy.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2018

Tác giả

Hoàng Minh An

Lời nói đầu

Năm 1897, tại cuộc thi toán của Hội Toán học và Vật lý Loránd Eotvos, Giáo sư L. F. Fejér, vào thời điểm đó vẫn là một sinh viên, đã sử dụng hệ quả thú vị sau đây của định lý hình học sơ cấp nổi tiếng của Euler: Nếu R là bán kính đường tròn ngoại tiếp và r là bán kính đường tròn nội tiếp của một tam giác thì $R \geq 2r$. Bất đẳng thức này gọi là *bất đẳng thức Euler.*

Bất đẳng thức này dễ dàng suy ra từ định lý Euler $d^2 = R^2 - 2Rr$ với d là khoảng cách giữa hai tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Vì $d^2 \geq 0$ nên $R \geq 2r$. Đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu hai đường tròn đồng tâm, tức là tam giác đó là tam giác đều.

Bất đẳng thức Euler khá bản chất, nó thể hiện mối quan hệ giữa bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Bất đẳng thức Euler có rất nhiều ứng dụng. Ngoài ra, bất đẳng thức Euler còn có thể được mở rộng theo nhiều hướng khác nhau: ngay trong tam giác (thay bất đẳng thức Euler bằng một bất đẳng thức tổng quát hơn), mở rộng cho tứ giác, tứ diện,...

Luận văn "*Một số mở rộng của bất đẳng thức Euler và ứng dụng*" có mục đích khai thác, tổng hợp, chứng minh bất đẳng thức Euler và các mở rộng của bất đẳng thức này, đồng thời trình bày các ứng dụng của bất đẳng thức Euler trong chứng minh các hệ thức hình học trong tam giác và tứ giác.

Chương 1

Bất đẳng thức Euler và một số mở rộng

1.1. Một số kiến thức bổ trợ

Cho tam giác ABC, với các cạnh $a = BC, b = AC, c = AB$. Kí hiệu
a) O, I theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác của tam giác.
b) R và r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp của tam giác.
c) r_a, r_b, r_c theo thứ tự là bán kính đường tròn bàng tiếp, tiếp xúc với các cạnh BC, AC, AB tương ứng.
d) Ký hiệu S là diện tích và $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của tam giác.

1.1.1. Một số định lý cơ bản trong tam giác

Định lý 1.1 (Định lý hàm số cosin) *Trong tam giác ABC, ta có*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Hệ quả 1.1 *Từ Định lý 1.1, ta có*

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Định lý 1.2 *Trong tam giác ABC ta có*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Định lý 1.3 *Diện tích S của tam giác ABC được tính theo công thức sau:*

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c,\\
S &= \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B,\\
S &= \frac{abc}{4R},\\
S &= 2R^2\sin A\sin B\sin C,\\
S &= sr,\\
S &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\\
S &= \sqrt{rr_ar_br_c},\\
S &= \frac{ar_br_c}{r_b+r_c} = \frac{br_cr_a}{r_c+r_a} = \frac{cr_ar_b}{r_a+r_b},
\end{aligned}$$

Định lý 1.4 *Trong tam giác ABC, ta có*

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2} = \frac{S}{p}$$

1.1.2. Một số bất đẳng thức cơ bản

Định lý 1.5 (Bất đẳng thức AM-GM) *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm, ta có*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Hệ quả 1.2 *Với mọi số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$, ta có*

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Hệ quả 1.3 *Với mọi số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$, ta có*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Định lý 1.6 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz) *Cho hai dãy số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Khi đó*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

1.1.3. Tứ giác nội tiếp

1.1.3.1. Định nghĩa và tính chất

Xét tứ giác lồi $ABCD$.

Định nghĩa 1.1 Tứ giác $ABCD$ có bốn đỉnh A, B, C, D nằm trên một đường tròn được gọi là *tứ giác nội tiếp*.

Tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn một trong các điều kiện sau.

Tính chất 1.1 *Tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn $(O; R)$ khi và chỉ khi $OA = OB = OC = OD$.*

Tính chất 1.2 *Tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi hai đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh đối dưới một góc bằng nhau.*

Tính chất 1.3 *Tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp khi và chỉ tổng hai góc đối diện bằng 180^0.*

Tính chất 1.4 *Giả sử tứ giác $ABCD$ có hai đường thẳng chứa hai cạnh AB và CD cắt nhau tại I. Khi đó điều kiện cần và đủ để tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp là $IA.IB = IC.ID$.*

Tính chất 1.5 *Giả sử tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại K. Khi đó điều kiện cần và đủ để tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp là $KA.KC = KB.KD$.*

Tính chất 1.6 (Đường thẳng Simson) *Tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi chân ba đường cao hạ từ đỉnh của tứ giác xuống ba đường thẳng chứa ba cạnh tạo bởi ba đỉnh còn lại là thẳng hàng.*

Tính chất 1.7 (Định lí Ptoleme) *Tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi $AC.BD = AB.CD + AD.BC$.*

1.1.3.2. Diện tích tứ giác

Định lý 1.7 (Định lí Brahmagupta) *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp với các cạnh $AB = a, BC = b, CD = c, AD = d$. Khi đó diện tích của tứ giác $ABCD$ là*

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

với $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ là nửa chu vi của tứ giác $ABCD$.

1.1.3.3. Độ dài hai đường chéo của tứ giác nội tiếp

Định lý 1.8 *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp với các cạnh $AB = a, BC = b, CD = c, AD = d$. Khi đó độ dài hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ được cho bởi công thức*

$$AC^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd};\ BD^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

1.1.4. Tứ giác ngoại tiếp

1.1.4.1. Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 1.2 Tứ giác lồi $ABCD$ được gọi là *tứ giác ngoại tiếp* một đường tròn nếu đường tròn đó tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ giác.

Cho tứ giác lồi $ABCD$. Khi đó $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp khi và chỉ khi nó thỏa mãn một trong các điều kiện sau.

Tính chất 1.8 *Tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn $(O; R)$ nếu và chỉ nếu tổng các cặp cạnh đối bằng nhau, tức là $AB + CD = BC + DA$.*

Tính chất 1.9 *Tứ giác $ABCD$ có các tia AD và BC cắt nhau ở E; các tia AB và DC cắt nhau ở F. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*
a) Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp.
b) $BE + BF = DE + DF$.
c) $FA + CE = EA + CF$.

1.1.4.1. Diện tích tứ giác ngoại tiếp

Định lý 1.9 *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp với các cạnh $AB = a, BC = b, CD = c, AD = d$. Khi đó diện tích của tứ giác $ABCD$ là*

$$S = \sqrt{abcd} \sin \frac{B+D}{2}.$$

1.1.5. Tứ giác hai tâm

Định nghĩa 1.3 Tứ giác $ABCD$ được gọi là *tứ giác hai tâm* nếu nó vừa nội tiếp được một đường tròn và vừa ngoại tiếp được một đường tròn.

Nhận xét. Tứ giác hai tâm có đầy đủ các tính chất của một tứ giác nội tiếp và tứ giác ngoại tiếp.

Giả sử tứ giác hai tâm nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính r. Các định lý dưới đây được trình bày trong [2].

Định lý 1.10 *Trong tứ giác hai tâm, ta có các đẳng thức sau:*

a) $(bc + ad)(ab + cd)(ac + bd) = 16p^2R^2r^2$.

b) $ab + bc + cd + da = p^2$.

c) $ab + bc + cd + da + ac + bd = p^2 + 2r^2 + 2r\sqrt{4R^2 + r^2}$.

d) $ac + bd = 2r(r + \sqrt{4R^2 + r^2})$.

1.1.5.1. Diện tích của tứ giác hai tâm

Cho tứ giác hai tâm $ABCD$ với các cạnh $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ với nửa chu vi $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ và diện tích S.

Định lý 1.11 *Diện tích của tứ giác hai tâm $ABCD$ được cho bởi công thức $S = \sqrt{abcd}$.*

Hệ quả 1.4 *Tứ giác hai tâm có diện tích được tính bởi công thức*

$$S = ac \tan \frac{\theta}{2} = bd \cot \frac{\theta}{2},$$

với θ là góc giữa hai đường chéo.

Hệ quả 1.5 *Trong tứ giác hai tâm ta có*

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{bc}{ad}} = \cot \frac{C}{2};\ \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{cd}{ab}} = \cot \frac{D}{2}.$$